Pismeni dio ispita iz Matematike II (MF), 02.02.2012.

Grupa A

1. Izračunati integral $A = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2\operatorname{arctg} 3} \dfrac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2\sin x - \cos x + 1} dx.$
2. Odrediti ekstreme funkcije $z = x + \dfrac{y^2}{2x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{5}{2x}.$
3. Dat je trostruki integral $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_0^{\sqrt{4-\rho^2}} dz$ u cilindričnim koordinatama. Skicirati oblast integracije i izračunati taj integral prelazeći na sferne koordinate.
4. Izračunati površinski integral $I = \iint\limits_S y\,dydz - x\,dzdx + z\,dxdy,$ ako je S donja strana dijela površi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kojeg isjeca površ $x^2 + y^2 = y.$

Grupa B

1. Izračunati integral $B = \int\limits_{-2\operatorname{arctg} 2}^{2\operatorname{arctg} 3} \dfrac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2\sin x + 6\cos x + 7} dx.$
2. Odrediti ekstreme funkcije $z = \left(\dfrac{1}{9}x^2 + y^2\right) e^{-\frac{x}{3} + y}.$
3. Izračunati trostruki integral $I = \iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dydz,$ pri čemu je Ω unutrašnjost lopte $x^2 + y^2 + z^2 = x.$
4. Izračunati površinski integral $I = \iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$ ako je S vanjska strana tijela određenog ravnima $x = 0, y = 0, z = h$ i dijelom konusa $x^2 + y^2 = z^2$ u prvom oktantu.

Stari program:

1. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y^{iv} + y'' = x^2 \cos x.$
3. Izračunati trostruki integral $I = \iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dydz,$ pri čemu je Ω unutrašnjost lopte $x^2 + y^2 + z^2 = x.$
4. Izračunati površinski integral $I = \iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$ ako je S vanjska strana tijela određenog ravnima $x = 0, y = 0, z = h$ i dijelom konusa $x^2 + y^2 = z^2$ u prvom oktantu.

Pismeni dio ispita iz Matematike II (MF), 17.02.2012.

GRUPA A

1. Izračunati zapreminu tijela koje nastaje rotacijom oko x – ose figure određene parabolom $2y^2 = ax\,(a>0)$ i pravama $y=0,\ x+y=a.$
2. Izračunati dvostruki integral $I = \iint\limits_D \frac{xy\sqrt{1-x^2-y^2}}{2x^2+y^2}dx,$ ako je D dio kruga $x^2+y^2 \le 1$ u prvom kvadrantu.
3. Izračunati pomoću krivolinijskog integrala površinu figure omeđene krivom $x = \frac{5at^2}{1+t^5},\ y = \frac{5at^3}{1+t^5},\ 0 \le t \le 1.$
4. Izračunati integral $I\left(\alpha\right) = \int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx\ \left(\alpha^2 < 1\right)$ pomoću diferenciranja po parametru $\alpha.$

$\sqrt{\quad}$

GRUPA B

1. Izračunati zapreminu tijela koje nastaje rotacijom oko x – ose figure u drugom kvadrantu određene parabolom $y^2 = -\frac{ax}{2}(a>0)$ i pravama $y=0,\ y-x=a.$
2. Izračunati dvostruki integral $I = \iint\limits_D \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}+1\right)}dx,$ ako je oblast D određena nejednačinama $x^2-y^2 \le 0,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4.$
3. Izračunati pomoću krivolinijskog integrala površinu figure omeđene krivom $x = \frac{at}{\left(1+t\right)^4},\ y = \frac{at^2}{\left(1+t\right)^4}, 0 \le t \le 1.$
4. Izračunati integral $I\left(\alpha\right) = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\left(\alpha x\right)}{x\sqrt{1-x^2}}dx\left(\alpha > 0\right)$ pomoću diferenciranja po parametru $\alpha.$

Stari program:

1. Naći oblast konvergencije reda: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n+1\right)^2\left(x+1\right)^n}{\left(3n+1\right)^3 \cdot 4^{2n-2}}.$
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y' - \frac{xy}{2\left(x^2-1\right)} - \frac{x}{2y} = 0.$
3. Izračunati pomoću krivolinijskog integrala površinu figure omeđene krivom $x = \frac{at}{\left(1+t\right)^4},\ y = \frac{at^2}{\left(1+t\right)^4}, 0 \le t \le 1.$
4. Izračunati integral $I\left(\alpha\right) = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\left(\alpha x\right)}{x\sqrt{1-x^2}}dx\left(\alpha > 0\right).$ pomoću diferenciranja po parametru $\alpha.$

Drugi parcijalni ispit, 08.06.2012.

GRUPA A

1. Izračunati zapreminu tijela u oblasti $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 36, x^2+y^2\ge z^2, z\le 0.$
2. Izračunati krivolinijski integral $\int_c \sqrt{2y}\,ds,$ ako je c kriva $x=t, y=\frac{1}{2}t^2, z=\frac{1}{3}t^3, 0\le t\le 1.$
3. Izračunati površinski integral $I=\iint_S 3z\,dS, S: z=2-x^2-y^2, z\ge 0.$

Drugi parcijalni ispit, 08.06.2012.

GRUPA B

1. Izračunati zapreminu tijela u oblasti $\Omega: x^2+y^2+z^2\ge 4,\ x^2+y^2\le 3z,\ z\le\sqrt{x^2+y^2}.$
2. Izračunati krivolinijski integral $\int_c (x+z)\,ds,$ ako je c kriva $x=t,\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}t^2,\ z=t^3, 0\le t\le 1.$
3. Izračunati površinski integral $E=\iint_S\left(\sqrt{1-z^2}-z\right)dS,\ \ S: z^2=x^2+y^2,\ 0\le z\le 1.$

Pismeni dio ispita iz Matematike II, 21.06.2012.

GRUPA A

1. Izračunati površinu figure koja je određena parabolom $y^2 = 2ax,\ a > 0$ i normalom na parabolu koja zaklapa ugao od 135^0 sa x – osom.
2. Naći uslovne ekstreme funkcije $z = ax + by,$ ako je $x^2 + y^2 = 1.$
3. Izračunati trostruki integral $I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{x+y}{a^2+z^2} dxdydz,$ ako je Ω oblast ograničena ravnima $x = 0, y = 0, x + y + z = a, x + y - z = a,\ a > 0.$
4. Izračunati površinski integral druge vrste $I = \iint\limits_{S} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$ ako je S vanjski dio površi $z^2 = 2x^2 + 2y^2,\ 0 \le z \le 4.$

GRUPA B

1. Izračunati površinu figure koju u ravni određuju linije: $y = \frac{b^3}{b^2 + x^2},\ 2by = x^2, b > 0.$
2. Naći jednačinu tangentne ravni na površ $z = 2cxy,$ koja prolazi kroz tačku $A(1, 0, -4c)$ i okomita je na ravan $x = y.$
3. Izračunati trostruki integral $I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{y+z}{a^2+x^2} dxdydz,$ ako je Ω oblast ograničena ravnima $y = 0, z = 0, x + y + z = a, y + z - x = a,\ a > 0.$
4. Izračunati površinski integral druge vrste $I = \iint\limits_{S} (2xz + z\sin 2x + x + y)\,dydz + \left(4yz\sin^2 x + y + z\right)dzdx + \left(x + y - 2z^2\right)dxdy,$ ako je S vanjski dio oblasti određene površima $z = 4 - 2x^2 - y^2,\ z = -x^2.$

Stari program

1. Naći sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)}.$
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $x^2(x-1)y' - y^2 - x(x-2)y = 0.$
3. Izračunati trostruki integral $I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{y+z}{a^2+x^2} dxdydz,$ ako je Ω oblast ograničena ravnima $y = 0, z = 0, x + y + z = a, y + z - x = a,\ a > 0.$
4. Izračunati površinski integral druge vrste $I = \iint\limits_{S} (2xz + z\sin 2x + x + y)\,dydz + \left(4yz\sin^2 x + y + z\right)dzdx + \left(x + y - 2z^2\right)dxdy,$ ako je S vanjski dio oblasti određene površima $z = 4 - 2x^2 - y^2,\ z = -x^2.$

Pismeni ispit iz Matematike II, 06.07.2012.

GRUPA A

1. Izračunati integral $\int\limits_0^2 x\sqrt{4+x^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx.$
2. Promijeniti poredak integracije u integralu $I=\int\limits_{-7}^{-1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)\,dx.$
3. Odrediti brojeve a i b tako da vektorsko polje $\vec{v}=\left(yz+axy, xz+bx^2+yz^2, axy+y^2z\right)$ bude potencijalno i za dobijeno polje izračunati njegovu cirkulaciju duž pravolinijske konture od tačke $A(1,1,1)$ prema tački $B(2,2,2)$.
4. Izračunati krivolinijski integral prve vrste $\int\limits_c (x+y)\,ds,$ ako je c desna latica lemniskate $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}.$

GRUPA B

1. Izračunati integral $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx.$
2. Promijeniti poredak integracije u integralu $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx.$
3. Dokazati da je vektorsko polje $\vec{v}=\left(2xz, 2yz, x^2+y^2-z^2\right)$ potencijalno i naći tok (fluks) tog polja kroz vanjsku stranu sfere $x^2+y^2+(z-1)^2=1.$
4. Izračunati krivolinijski integral prve vrste $\int\limits_c (x-y+2z)\,ds,$ ako je c kontura trougla $ABC,\ A(0,0,0), B(14,0,0), C\left(9,\frac{36}{5},\frac{48}{5}\right).$

Stari program

1. Razviti u Fourierov red funkciju $f(x)=\frac{\pi-x}{2}, x\in[0,2\pi].$
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'''-4y=x.$
3. Odrediti brojeve a i b tako da vektorsko polje $\vec{v}=\left(yz+axy, xz+bx^2+yz^2, axy+y^2z\right)$ bude potencijalno i za dobijeno polje izračunati njegovu cirkulaciju duž pravolinijske konture od tačke $A(1,1,1)$ prema tački $B(2,2,2)$.
4. Izračunati krivolinijski integral prve vrste $\int\limits_c (x+y)\,ds,$ ako je c desna latica lemniskate $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}.$

Pismeni ispit iz Matematike II, 06.09.2012.

GRUPA A

1. Odrediti zapreminu tijela nastalog rotacijom krive $(y-2)^2 = x(4-x)$ oko y – ose.
2. Izračunati trostruki integral $\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz,$ ako je

   $\Omega : x^2 + y^2 \le 2a\ ,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2,\ a > 0.$
3. Izračunati pomoću Greenove formule krivolinijski integral $\oint\limits_{c} \dfrac{xdy - (y + x^3)dx}{(x^2 + y^2 + 2y)^3},$ ako je c

   pozitivno orjentisana kontura kružnice $x^2 + y^2 + 2y = 1.$
4. Izračunati površinski integral $\iint\limits_{S} zdydz + xdzdx + ydxdy,$ ako je S dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

   unutar cilindra $x^2 + y^2 = ax,\ a > 0.$

GRUPA B

1. Odrediti zapreminu tijela nastalog rotacijom krive $(x+1)^2 = -y(y+2)$ oko x – ose.
2. Izračunati trostruki integral $\iiint\limits_{\Omega} (4x^2 + y^3 - 1)\,dx\,dy\,dz,$ ako je oblast Ω ograničena površima

   $z = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y - 2$ i $z = 4x^2 - 2x + 5y^2 + 4y - 14.$
3. Izračunati pomoću Greenove formule krivolinijski integral

   $\oint\limits_{c} \left(x^2 y + \dfrac{y^3}{3} + ye^{xy} \right) dx + \left(x + xe^{xy} \right) dy,$ ako je c pozitivno orjentisana kontura određena

   linijama $y = \sqrt{1 - x^2},\ y = 0.$
4. Izračunati površinski integral $\iint\limits_{S} xzdydz + xydzdx + yzdxdy,$ ako je S vanjska strana omotača

   tijela koje pripada prvom oktantu i ograničeno je cilindrom $x^2 + y^2 = 1,$ te ravnima
   $x = 0, y = 0, z = 0, z = 2.$

Stari program:

1. Razviti u Fourierov red funkciju $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2},\ x \in [0, 2\pi].$
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y''' - 4y = x.$
3. Izračunati pomoću Greenove formule krivolinijski integral $\oint\limits_{c} \dfrac{xdy - (y + x^3)dx}{(x^2 + y^2 + 2y)^3},$ ako je c

   pozitivno orjentisana kontura kružnice $x^2 + y^2 + 2y = 1.$
4. Izračunati površinski integral $\iint\limits_{S} zdydz + xdzdx + ydxdy,$ ako je S dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

   unutar cilindra $x^2 + y^2 = ax,\ a > 0.$

Pismeni dio ispita **iz Matematike II**, 03.02.2011.

GRUPA A

1. Naći površinu figure koja je ograničena linijama $y=-x^2, x-y-2=0$.
2. Naći ekstreme funkcije $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.
3. Naći zapreminu tijela ograničenog ravnima
   $x=1, x=3, y=1, y=5,\ 2x-y+z-1=0,\ z=0$.
4. Izračunati krivolinijski integral $I=\int_c z\sqrt{x^2+y^2+2z^2}\,ds$, ako je c kriva

   $$x=\frac{r\sqrt{2}}{2}\cos t, y=\frac{r\sqrt{2}}{2}\cos t, z=r\sin t, t\in[0,\pi].$$

GRUPA B

1. Izračunati površinu rotacionog tijela koje se dobije rotacijom parabole $y^2=4x$ od tačke $x=0$ do tačke $x=2$.
2. Naći uslovne ekstreme funkcije $z=6+4x+3y$ uz uslov $x^2+y^2=1$.
3. Naći zapreminu tijela ograničenog ravnima
   $x=-1,\ x=2,\ y=-2,\ y=2,\ 4x-3y+z-2=0,\ z=0$.
4. Izračunati krivolinijski integral $I=\int_c y\sqrt{x^2+4y^2+z^2}\,ds$, ako je c kriva

   $$x=\frac{a\sqrt{6}}{3}\sin t, y=a\cos t, z=\frac{a\sqrt{3}}{3}\sin t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Pismeni dio ispita iz **Matematike II,** 18.02.2011

GRUPA A

1. Izračunati integrale: $I_1=\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.
2. Izmjeniti poredak integracije u integralu $I=\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.
3. Izračunati površinski integral $P=\iint_S (z^2+1)\,dS$, S je dio sfere

   $x^2+y^2+z^2=4$ u prvom oktantu.
4. Izračunati integral $I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{xe^{x^2}}dx$ pomoću diferenciranja po parametru

   ako je $\alpha>-1$.

GRUPA B

1. Izračunati integrale: $I_1 = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}},\ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$

2. Izmjeniti poredak integracije u integralu $I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3. Izračunati površinski integral $\iint_{(S)} \sqrt{-x^2+4}\, dS$, gdje je (S) omotač površi

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{9}, 0 \le z \le 3.$$

4. Izračunati pomoću diferenciranja po parametru integral

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x\right) dx,\ \alpha > 0.$$

Pismeni dio ispita iz **Matematike II**, 23.06.2011.

GRUPA A

1. Izračunati dužinu luka krive $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ od tačke sa apscisom $x = 1$ do tačke sa apscisom $x = 2$.
2. Izračunati pomoću dvostrukog integrala zapreminu tijela kojeg ograničavaju površi $x^2 + y^2 - 2az = 0,\ \left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right),\ a > 0.$
3. Izračunati pomoću Greenove formule krivolinijski integral $I = \oint_c \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy,$ ako je c kontura koja ograničava oblast $y^2 \le 2x-2,\ x \le 2,\ y \ge 0.$
4. Izračunati površinski integral $I = \iint_S \left(x+y+z^2\right) dS,$ ako je S polulopta

$$x^2+y^2+z^2=9, z \ge 0.$$

GRUPA B

1. Izračunati dužinu luka krive $y = a\ln\frac{a^2}{a^2 - x^2}\ (a>0)$ od tačke $A(0,0)$ do tačke $B\left(\frac{a}{2}, a\ln\frac{4}{3}\right).$
2. Izračunati pomoću dvostrukog integrala zapreminu tijela kojeg ograničavaju površi $x^2+y^2=4\ (x \ge 0),\ x^2-y^2=1\ (x \ge 1), z = 4 - x^2\ (z \ge 0)$ i ravan $z = 0.$

3. Izračunati krivolinijski integral $\oint_c xds$, ako je c lemniskata $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right),\ a>0.$

4. Izračunati površinski integral $I=\iint_S (x-y+z)dS$, ako je S polulopta $x^2+y^2+z^2=4, z\geq 0.$

Pismeni dio ispita iz **Matematike II**, 08.07.2011.

Grupa A

1. Odrediti jednačinu tangentne ravni na površ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, koja je normalna na pravoj $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

2. Izračunati integral po glatkom luku koji spaja tačke A i B
$$\int_{\widehat{AB}}\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}dz,\ A(1,1,1), B(1,2,3), \widehat{AB}\subset\left\{(x,y,z): x>0, y>0, z>0\right\}$$

3. Izračunati zapreminu onog dijela lopte $x^2+y^2+z^2=1$ koji se nalazi unutar cilindra $x^2+(y-1)^2=1$.

4. Dato je vektorsko polje $\vec{A}=(e^x z-2xy, 1-x^2, e^x+z)$. Pokazati da je polje A potencijalno i odrediti mu potencijal. Izračunati integral $\int_L \vec{A}\cdot d\vec{r}$, gdje je L duž PQ, P (0, 1, -1), Q (2, 3, 0), orijentisana od P prema Q.

Grupa B

1. Dokazati da proizvoljna tangentna ravan površi S: $xyz=a^3\,(a>0, \text{konstanta})$ obrazuje sa koordinatnim ravnima tetraedar stalne zapremine $\left(V=\frac{9}{2}a^3\right)$.

2. Izračunati integral po glatkom luku koji spaja tačke A i B
$$\int_{\widehat{AB}}\frac{zxdy+xydz-yzdx}{(x-yz)^2}\ A(7,2,3),\ B(5,3,1),\ \left(z\neq\frac{x}{y}\right).$$

3. Izračunati zapreminu tijela koje je ograničeno površima $x^2+y^2=y, x^2+y^2=2y, z=y^2, z=0$.

4. Dato je vektorsko polje $\vec{A}=(2x(y^2+z^2)+yz, 2y(z^2+x^2)+xz, 2z(x^2+y^2)+xy)$. Pokazati da je polje A potencijalno i odrediti mu potencijal. Izračunati fluks vektorskog polja $\vec{A}$ kroz spoljnu stranu polusfere $\Gamma: x^2+y^2+z^2-2z=0, y\geq 0$

Pismeni dio ispita iz **Matematike II,** 15.09.2011.

GRUPA A

1. Izračunati površinu figure koju određuju prava $2x+3\sqrt{3}y-12=0$ i dio elipse $4x^2+9y^2=36$ u prvom kvadrantu.

2. Promijeniti poredak integracije i izračunati dvostruki integral $I=\int_0^2 ydy \int_{\frac{1}{2}}^{2-\frac{y^2}{8}} \frac{dx}{\sqrt{x^5}}$.

3. Izračunati površinu dijela površi $x^2+y^2+z-1=0$ koji se nalazi iznad ravni $z=0$.

4. Dati su krivolinijski integrali $I_1=\int_{c_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, $I_2=\int_{c_2}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, gdje je c_1 duž $\overline{AB}$, $A(1,2),B(-1,4)$, orjentisana od tačke A prema tački B, a c_2 je parabola koja prolazi kroz tačke $A(1,2),B(-1,4)$ i $C\left(\frac{-1}{2},\frac{11}{4}\right)$. Dokazati da je $I_1=I_2$ i izračunati taj broj.

GRUPA B

1. Izračunati površinu krivolinijskog četverougla omeđenog parabolama $y=x^2,\ y=\frac{x^2}{3},\ y^2=2x,\ y^2=3x.$
2. Promijeniti poredak integracije i izračunati dvostruki integral $I=\int_0^a ydy\int_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}}\frac{x\ln(x+a)dx}{(x-a)^2}.$
3. Izračunati površinu dijela sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ koji se nalazi u unutrašnjosti cilindra $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ 0<b<a.$
4. Izračunati krivolinijski integral $I=\oint_c \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx+y^3e^{-y}dy$, ako je c pozitivno orjentisana kontura oblasti određene isječkom kružnog prstena $1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x.$

Pismeni dio ispita iz **Matematike II,** 23.09.2011.

GRUPA A

1. Izračunati površinu figure koju određuju prava $2x+3\sqrt{3}y-12=0$ i dio elipse $4x^2+9y^2=36$ u prvom kvadrantu.

2. Promijeniti poredak integracije i izračunati dvostruki integral $I=\int_0^2 ydy \int_{\frac{1}{2}}^{2-\frac{y^2}{8}} \frac{dx}{\sqrt{x^5}}$.

3. Izračunati površinu dijela površi $x^2+y^2+z-1=0$ koji se nalazi iznad ravni $z=0$.

4. Dati su krivolinijski integrali $I_1 = \int\limits_{c_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, $I_2 = \int\limits_{c_2} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, gdje je c_1 duž $\overline{AB}$, $A(1,2), B(-1,4)$, orjentisana od tačke A prema tački B, a c_2 je parabola koja prolazi kroz tačke $A(1,2), B(-1,4)$ i $C\left(\frac{-1}{2}, \frac{11}{4}\right)$. Dokazati da je $I_1 = I_2$ i izračunati taj broj.

GRUPA B

1. Izračunati površinu krivolinijskog četverougla omeđenog parabolama $y = x^2,\ y = \frac{x^2}{3},\ y^2 = 2x,\ y^2 = 3x.$
2. Promijeniti poredak integracije i izračunati dvostruki integral $$I = \int\limits_0^a ydy \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} \frac{x\ln(x+a)dx}{(x-a)^2}.$$
3. Izračunati površinu dijela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ koji se nalazi u unutrašnjosti cilindra $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ 0 < b < a.$
4. Izračunati krivolinijski integral $I = \oint\limits_c \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx + y^3 e^{-y}dy$, ako je c pozitivno orjentisana kontura oblasti određene isječkom kružnog prstena $1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x.$

Pismeni dio ispita iz **Matematike II,** oktobar 2011.

1. Odrediti jednačinu tangentne ravni na površ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, koja je normalna na pravoj $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.
2. Promijeniti poredak integracije i izračunati dvostruki integral $$I = \int\limits_0^a ydy \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} \frac{x\ln(x+a)dx}{(x-a)^2}.$$
3. Izračunati krivolinijski integral $\oint\limits_c xds$, ako je c lemniskata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),\ a > 0.$
4. Dato je vektorsko polje $\vec{A} = (2x(y^2+z^2) + yz, 2y(z^2+x^2) + xz, 2z(x^2+y^2) + xy)$. Pokazati da je polje A potencijalno i odrediti mu potencijal. Izračunati fluks vektorskog polja $\vec{A}$ kroz spoljnu stranu polusfere $\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0, y \ge 0$.